№5-дәріс

Жазықтықтағы түзу.
Түзудің әр түрлі теңдеулері, екі түзудің арасындағы бұрыш. Сызықтардың параллелизмі мен перпендикулярлығының шарттары

Сызықтар, беттер және олардың теңдеулері

Объект деген сөзді жазықтықтағы сызықтар, кеңістіктегі сызықтар мен беттер деп түсінеміз.

Анықтама

1. Объект деп әрқайсысы осы объектінің мінездемелік қасиеттерін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны (н.г.о).

2. Математикалық қатынастар арқылы немесе объектінің нүктелерінің координаталары арасындағы қатынастар арқылы жазылған объектінің мінездемелік қасиеттерін объектінің теңдеуі немесе объектінің теңдеулер жүйесі деп атаймыз.

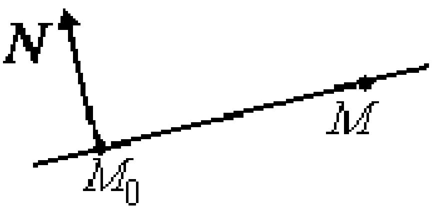
Мысал 1. Центрі координатаның бас нүктесінде орналасқан радиусы r жазықтықтағы шеңбер - объект. Мінездемелік қасиеті: шеңбердің барлық нүктелері осы шеңбердің центрінен бірдей r қашықтықта орналасқан. Егер $O(0,0)$ - координаталардың бас нүктесі, ал $M(x, y)$ - шеңбердің ағымдық (кез келген) нүктесі болса, онда $\overline{OM} = r$ немесе $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ - шеңбердің мінездемелік қасиетінің математикалық түрде жазылуы. Ықшамдай келе, объектінің теңдеуін аламыз $x^2 + y^2 = r^2$.

Объектпен таныса келе мынадай сұрақтар туындайды:

1. Берілген мінездемелік қасиеті бойынша объектінің теңдеуін құру.
2. Берілген объекттің теңдеуі бойынша, теңдеудің әртүрлі параметрлік мәндерінде объектіні зерттеу.

Мысал 2.

а) Жазықтықта берілген $M_o(x_o, y_o)$ нүктесі арқылы өтетін, $\overline{N}(A, B)$ векторына перпендикуляр түзудің теңдеуін жаз.

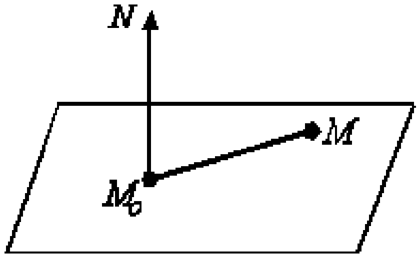


$M(x, y)$ - ізделінді түзудің ағымдық нүктесі болсын. Онда $\overline{M_oM} = (x - x_o\ , \quad y - y_o) \perp \overline{N}(A\ , B)$. Бұдан, $\overline{M_oM} \cdot \overline{N} = 0$. Немесе

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0 \qquad (1)$$

(1) – берілген нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

б) $M_o(x_o, y_o, z_o)$ нүктесі арқылы өтетін $\overline{N}(A, B, C)$ векторына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жаз.



$\overline{M_oM} \perp \overline{N}$ болғандықтан:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0 \qquad (2)$$

(2) $-$ M_o нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

2 – мысалдан, жазықтықтағы сызықтың теңдеуі - $F(x, y) = 0$ түрінде, ал беттің теңдеуі - $F(x, y, z) = 0$ түрде болатынын байқаймыз. Кеңістіктегі сызықтың жалпы теңдеуі екі беттің қиылысуы ретінде беріледі, яғни

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Е с к е р т у . (1) мен (2)-ден байқайтынымыз, түзу мен жазықтықтың теңдеуі сызықтық, яғни координатаға қарағанда бірінші дәрежелі.

Жазықтықтағы түзу

Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі

$$l \sim \quad Ax + By + C = 0, \qquad (4)$$

$\overline{N}(A, B) \perp l$ - l түзуінің нормаль векторы.

1. Егер $B \neq 0$, онда (4)-тен $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ шығады, яғни $y = kx + b$ бұрыштық коэффиценті бойынша берілген теңдеу, мұндағы $k = -\dfrac{A}{B}$ - бұрыштық коэффицент, ол түзудің OX осімен жасайтын бұрышының тангенсіне тең .
2. Егер $C = 0$ - онда түзу координатаның бас нүктесі арқылы өтеді.
3. Егер $A = 0$ - онда $l \,||\, OX$.
4. Егер $B = 0$ - онда $l \,||\, OY$.
5. $x = 0, \quad y = 0$ - координата осьтерінің теңдеулері.

Екі нүкте $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

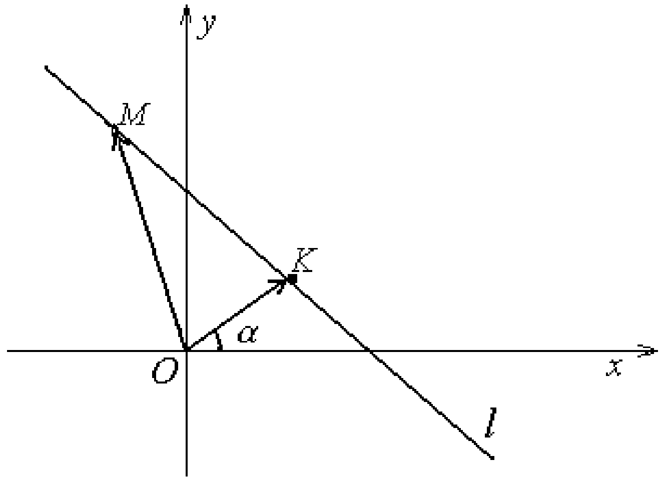
$M(x, y)$ - түзудің ағымдық нүктесі болсын. Онда $\overline{M_1M} \,||\, \overline{M_1M_2}$.

Векторлардың коллинеар болу шартын ескерсек:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{5}$$

Түзудің «кесіндідегі» теңдеуі. Түзудің координат осьтерімен қиылысу нүктелерінің координаталары $M_1(a;0)$ және $M_2(0;b)$ болсын. (5)теңдігіне қойсақ: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Түзудің нормаль теңдеуі.



$\overline{OK}\perp l$, $\left|\overline{OK}\right|=p$, α - $\overline{OK}$ мен OX арасындағы бұрыш болсын. Онда $\overline{n^o}(\cos\alpha;\sin\alpha)\,||\,\overline{OK}$ и $\left|\overline{n^o}\right|=1$. $пр_{\overline{n^o}}\overline{OM}=\overline{OM}\cdot\overline{n^o}=p$ болғандықтан:

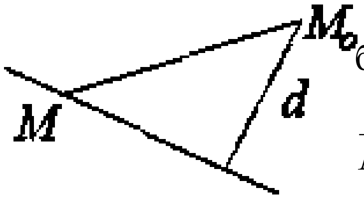
$$\overline{OM}\cdot\overline{n^o}-p=0, \quad \text{или} \quad x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{6}$$

Е с к е р т у. (4) –ші теңдеуді нормаль түрге келтіру үшін, оны

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

санына көбейту керек, мұндағы μ –дың таңбасы (4) теңдеудегі C-ның таңбасына қарама-қарсы таңбамен алынады.

$M_o(x_o, y_o)$ **нүктесінен** $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ **түзуіне дейінгі ара қашықтық**



$M_1(x_1, y_1)$ нүктесі түзуге тиісті нүкте болсын. Онда

$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=p$.

$\overline{M_1M_o}=(x_o-x,\ y_o-y_1)$ және

$d=\left|пр_{\overline{n^o}}\overline{M_1M_o}\right|=\left|\overline{M_1M_o}\cdot\overline{n^o}\right|$ болғандықтан:

$d=\left|(x_o-x_1)\cos\alpha+(y_o-y_1)\sin\alpha\right|=\left|x_o\cos\alpha+y_o\sin\alpha-(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)\right|$.

Немесе

$$d=\left|x_o\cos\alpha+y_o\sin\alpha-p\right| \tag{7}$$

Егер түзу (4)-ші теңдеу түрінде берілген болса, онда

$$d=\frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (8)$$

Түзулер арасындағы бұрыш. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық белгілері

$l_1 \sim \quad A_1x+B_1y+C_1=0$,
$l_2 \sim \quad A_2x+B_2y+C_2=0$ түзулері берілсін.

$\overline{N}_1(A_1,B_1)\perp l_1$, $\overline{N}_2(A_2,B_2)\perp l_2$ болғандықтан:

а) түзулер арасындағы бұрыш

$$\cos\alpha=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{|\overline{N}_1|\cdot|\overline{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

б) $l_1||l_2$, егер $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$

в) $l_1\perp l_2$, егер $A_1A_2+B_1B_2=0$

Жазықтықтағы аналитикалық геометрияның кейбір есептерін шығаруда анықтауыштардың қолдануы

1. $M(x,\ y)$ - түзудің ағымдық нүктесі болсын. Екі нүкте $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ арқылы өтетін түзудің теңдеуі-

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

2. Үш нүкте $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ және $M_3(x_3,\ y_3)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыштың ауданы:

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$

3.
$l_1 \sim \quad A_1x+B_1y+C_1=0$,
$l_2 \sim \quad A_2x+B_2y+C_2=0$ түзулерінің бір еүктеде қиылысуының шарты:
$l_3 \sim A_3x+B_3y+C_3=0$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$